Лекція № 8

Дужки Пуссона

...дужка Пуассона містила в собі чудові можливості, і я подумав, що, можливо, мені вдасться зробити велике відкриття.

П. А. М. Дірак

Розглянутий в попередній лекції підхід Гамільтона до механіки виявився надзвичайно важливим для створення квантової механіки і з'ясування зв'язку між цими двома механіками. Хоча від формулювання рівнянь Гамільтона (1835) в класичній механіці до формулювання рівнянь Гайзенберга (1925) в квантовій механіці і пройшло 90 років. Подібна історія трапилася з дужками Пуассона. З часу їх введення в механіку Пуассоном до формулювання на їх основі Діраком нового підходу до квантової механіки пройшло близько 100 років.

Рівняння Гамільтона дають нам еволюцію з часом координат і імпульсів – основних змінних гамільтонового підходу. Одночасно вони дають нам часову еволюцію довільних механічних величин, $f\left(q_i\left(t\right), p_i\left(t\right), t\right)$, що залежать від координат, імпульсів і часу

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum\left(-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}\right). \qquad (20.1)$$

Тут виникла ***антисиметрична білінійна*** комбінація, яка носить назву ***дужок Пуассона*** для величин H та f і позначається так:

$$\left\{Hf\right\} = \sum\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right). \qquad (20.2)$$

(Зауважимо, що внаслідок антисиметрії цієї операції є важливою послідовність диференціювання за різними змінними. У деяких підручниках використовується інше позначення дужок Пуассона $\left(fg\right) = -\left\{fg\right\}$).

Таким чином, еволюція в часі механічних величин в гамільтонових системах визначається рівнянням

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left\{Hf\right\}. \tag{20.3}$$

Звідси випливає, що величина $f\left(q_i\left(t\right), p_i\left(t\right), t\right)$ є інтегралом руху, якщо для неї виконується рівняння $\partial f / \partial t + \left\{Hf\right\} = 0$. Якщо ж Інтеграл руху не залежить явно від часу, то його дужки Пуассона з гамільтоніаном звертаються в нуль: $\left\{Hf\right\} = 0$.

Дужки Пуассона можна ввести для будь-якої пари функцій, що залежать від двох наборів змінних $\left(q_i\right)$ і $\left(p_i\right)$, за наступним правилом:

$$\left\{fg\right\} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \right). \tag{20.4}$$

З визначення дужок Пуассона випливає їх антисиметрія:

$$\left\{fg\right\} = -\left\{gf\right\}, \tag{20.5}$$

Крім цього, прямий підстановкою перевіряються такі властивості цих дужок:

$$\left\{fc\right\} = 0, \tag{20.6}$$

$$\left\{f_1 + f_2, g\right\} = \left\{f_1, g\right\} + \left\{f_2, g\right\}, \tag{20.7}$$

$$\left\{f_1 f_2, g\right\} = f_1\left\{f_2, g\right\} + f_2\left\{f_1, g\right\}. \tag{20.8}$$

Задовольняється також так звана ***тотожність Якобі***, яке ми доведемо нижче:

$$\left\{f\left\{gh\right\}\right\} + \left\{g\left\{hf\right\}\right\} + \left\{h\left\{fg\right\}\right\} = 0. \tag{20.9}$$

На математичній мові наведені властивості (20.5-20.9) позначають, що ми маємо справу з так званою алгеброю Лі. Такою алгеброю називається система, в якій введена білінійна операція, що має якраз вказані властивості: антикомутативність (20.5) і в якій виконується тотожність Якобі (20.9). Прикладом алебри Лі є тривимірний векторний простір щодо векторного добутку. Як відомо з вектороного аналізу мають місце співвідношення $\left[\vec{a}\vec{b}\right] = -\left[\vec{b}\vec{a}\right]$ і $\left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right] + \left[\vec{b}\left[\vec{c}\vec{a}\right]\right] + \left[\vec{c}\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right] = 0$.

У випадку гамільтонової механіки роль такої білінійної антикомутативної операції відіграють дужки Пуассона. При цьому рівняння

(20.3) можна розглядати в якості однієї з формулювань класичної механіки. При формулюванні квантової теорії Дірака згадав про неї, оскільки Гайзенберг зіткнувся з некомутативністю квантових величин. Дірак сформулював зв'язок класичної і квантової механіки в словах: «співвідношення квантової і класичної теорій полягає не стільки в граничній згоді при $\hbar \to 0$, скільки в тому, що математичні операції двох теорій підкоряються одним і тим же законам". Порівняйте рівняння класичної механіки у формі дужок Пуассона та рівняння квантової механіки для операторів:

$$\frac{df}{dt} = \{Hf\}, \qquad \frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}\hat{f}\right], \tag{20.10}$$

де $\left[\hat{f}\hat{q}\right] = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}$ – антисиметрична білінійна операція – антикомутатор операторів. Тобто класична і квантова механіка виявилися пов'язаними в математичному плані, як ті, що можуть бути описані в рамках однакової алгебри з заміною класичних дужок Пуассона на квантові комутатори. (Зауважте, що дужки Пуассона містять в знаменнику $\partial q\,\partial p$, тобто розмірність дії, ту ж, що і константа Планка в квантовому рівнянні (20.10)).

Доведемо тотожність Якобі. Для цього зручно ввести так звані ***симплектичні координати*** (спрощені координати),

$$x_i = \left(p_1, p_2, ..., p_s; q_1, q_2, ..., q_s\right) = \left(x_1, x_2, ..., x_s; x_{s+1}, x_{s+2}, ..., x_{2s}\right)$$

що об'єднують, як рівні, координати $\left(q_1, ..., q_s\right)$ і імпульси $\left(p_1, ..., p_s\right)$ системи з s ступенями вільності. Крім того, введемо $2s \times 2s$ матрицю

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ +E & 0 \end{pmatrix} \tag{20.11}$$

з одиничними $s \times s$ діагональними матрицями E. Тоді рівняння Гамільтона записуються єдиним чином, як

$$\dot{x}_i = J_{ik}\frac{\partial H}{\partial x_k}, \qquad i,k = 1,2,...,2s. \tag{20.12}$$

У симплектичних координатах дужки Пуассона записуються так:

$$\{f_1 f_2\} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_i} J_{ik} \frac{\partial f_2}{\partial x_k}. \tag{20.13}$$

Підставляємо ці вирази в тотожність Якобі (20.9):

$$-\frac{\partial f}{\partial x_i}J_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\{gh\}-\frac{\partial g}{\partial x_i}J_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\{hf\}-\frac{\partial h}{\partial x_i}J_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\{fg\}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x_i}J_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial g}{\partial x_l}J_{lm}\frac{\partial h}{\partial x_m}\right)+\frac{\partial g}{\partial x_i}J_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial h}{\partial x_l}J_{lm}\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)+\frac{\partial h}{\partial x_i}J_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}J_{lm}\frac{\partial g}{\partial x_m}\right)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x_i}J_{ik}\frac{\partial^2 g}{\partial x_k\partial x_l}J_{lm}\frac{\partial h}{\partial x_m}+\frac{\partial f}{\partial x_i}J_{ik}\frac{\partial g}{\partial x_l}J_{lm}\frac{\partial^2 h}{\partial x_k\partial x_m}+\frac{\partial g}{\partial x_i}J_{ik}\frac{\partial^2 h}{\partial x_k\partial x_l}J_{lm}\frac{\partial f}{\partial x_m}+$$

$$+\frac{\partial g}{\partial x_i}J_{ik}\frac{\partial h}{\partial x_l}J_{lm}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_m}+\frac{\partial h}{\partial x_i}J_{ik}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}J_{lm}\frac{\partial g}{\partial x_m}+\frac{\partial h}{\partial x_i}J_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_l}J_{lm}\frac{\partial^2 g}{\partial x_k\partial x_m}=0 \tag{20.14}$$

Виконуючи в першому доданку наступні заміни: $i\leftrightarrow l$, $m\leftrightarrow i$ та $k\leftrightarrow m$, приводимо його до виду $\left(\partial h/\partial x_i\right)J_{ki}\left(\partial f/\partial x_l\right)J_{lm}\left(\partial^2 g/\partial x_k\partial x_m\right)$, який відрізняється від останнього доданка тільки заміною $J_{ik}\to J_{ki}$. Оскільки з (20.11) матриця антисиметрична J, то перший і останній доданки відрізняються тільки знаком і взаємно скорочуються. Те ж відноситься і до інших пар доданків.

Тотожність Якобі дозволяє довести важливу для механіки ***теорему Пуассона***: Якщо функції $f_1\left(p,q,t\right)$ і $f_2\left(p,q,t\right)$ є інтегралами руху, то їх дужка Пуассона також є інтегралом руху.

Перш за все, з (20.13) маємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f_1,f_2\}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}J_{ik}\frac{\partial f_2}{\partial x_k}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)J_{ik}\frac{\partial f_2}{\partial x_k}-\frac{\partial f_1}{\partial x_i}J_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)=$$

$$=\left\{\frac{\partial f_1}{\partial t},f_2\right\}+\left\{f_1,\frac{\partial f_2}{\partial t}\right\}. \tag{20.15}$$

Далі візьмемо повну похідну від дужок Пуассона. З (20.3) для $\{f_1 f_2\}$ з використанням тотожності Якобі маємо

$$\frac{d}{dt}\{f_1,f_2\} = \frac{\partial}{\partial t}\{f_1f_2\} + \{H\{f_1f_2\}\} = \left\{\frac{\partial f_1}{\partial t}f_2\right\} + \left\{f_1\frac{\partial f_2}{\partial t}\right\} - \{f_1\{f_2H\}\} - \{f_2\{Hf_1\}\} =$$

$$= \left\{\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \{Hf_1\}\right), f_2\right\} + \left\{f_1\left(\frac{\partial f_2}{dt} + \left\{H\frac{\partial f_2}{\partial t}\right\}\right)\right\} = \left\{\frac{df_1}{dt}, f_2\right\} + \left\{f_1, \frac{df_2}{dt}\right\} \tag{20.16}$$

Оскільки f_1 і f_2 – інтеграли руху, то $df_1/dt = 0$ і $df_2/dt = 0$, і з (20.16) випливає, що $d\{f_1f_2\}/dt = 0$ і $\{f_1f_2\}$ – інтеграл руху.

Тотожність Якобі дає можливість в деяких випадках по відомим двом інтегралам руху будувати додатковий інтеграл, хоча в більшості випадків ми будемо отримувати функцію вже відомих інтегралів.

На закінчення відзначимо, що якщо в визначення дужок Пуассона (20.4) підставити спеціальні вирази, і, то ми отримаємо співвідношення $f = p_i, g = p_k$, $f = q_i, g = q_k$ і $f = p_i, g = q_k$, то ми отримаємо співвідношення

$$\{p_i, p_k\} = 0, \quad \{q_i, q_k\} = 0, \quad \{p_i, q_k\} = \delta_{ik}, \tag{20.17}$$

з якими ми зіткнемося в курсі квантової механіки. Ці співвідношення називаються ***фундаментальними дужками Пуассона.*** У квантовій механіці аналогічне співвідношення має вигляд $[\hat{p}_i, \hat{q}_k] = -i\hbar\delta_{ik}$, де $[A,B] = AB - BA$.

Задача. Обчислити дужки Пуассона різних компонент моменту імпульсу M_x, M_y і M_z: $\{M_x, M_y\}$, $\{M_y, M_z\}$, $\{M_z, M_x\}$. Нагадаємо, що $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}]$.